Soluciones temas 1 y 2: Lógica y Demostraciones

Ejercicio 1

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1:

$$(\exists a \in A, \forall b \in B, P(a,b)) \implies (\forall b \in B, \exists a \in A, P(a,b))$$

Vamos a darle significado a los diferentes conjuntos y elementos del teorema:

$$A = \{ \text{ estudiantes de FM3 } \}$$
$$B = \{ \text{ clases de FM3 } \}$$
$$P(a,b) = \text{"estudiante } a \text{ se duerme durante la clase } b\text{"}$$

El siguiente teorema es similar al anterior:

Teorema 2:

$$(\forall b \in B, \exists a \in A, P(a,b)) \implies (\exists a \in A, \forall b \in B, P(a,b))$$

Preguntas:

1. ¿Cómo se podría escribir en lenguaje natural el lado a la izquierda de la implicación del teorema 1?
2. ¿Cómo se podría escribir en lenguaje natural el lado a la derecha de la implicación del teorema 1?
3. Averigüe si el teorema 1 es cierto o no, y demuéstrelo.
4. Averigüe si el teorema 2 es cierto o no, y demuéstrelo.

Solución

1. Existe un estudiante que se duerme en todas las clases de FM3.
2. En todas las clases de FM3 se duerme algún estudiante.
3. Es cierto. Consideramos dos casos posibles. Por agotamiento:
   - **Caso 1:** Supongamos que el lado izquierdo de la implicación es falso. En este caso el predicado es cierto por definición de implicación.
   - **Caso 2:** Supongamos que el lado izquierdo de la implicación es cierto. En este caso existe un elemento $a_0 \in A$ tal que $P(a_0, b)$ es cierto para todo $b \in B$. Por tanto, para todo $b \in B$ existe un $a \in A$ (que hemos llamado a_0) tal que $P(a_0, b)$ es cierto. Por tanto, el lado derecho de la implicación también es cierto.

   Como se dan ambos casos, el lado izquierdo implica el lado derecho, así que el teorema es cierto. $\square$

4. Es falso. Encontramos un contraejemplo. Según el lado izquierdo de la implicación, pueden $\exists a_0, a_1 \in A$ y $\exists b_0, b_1 \in B$, tal que $a_0 \neq a1$ y $b_0 \neq b1$, y para los que $P(a_0, b_0)$ y $P(a_1, b_1)$ sean ciertos, pero que hagan $P(a_0, b_1)$ y $P(a_1, b_y)$ falsos. Por tanto, en este caso no existiría un $a_x \in A$ que hiciera $P(a_x, b)$ cierto para todo $b \in B$.

Ejercicio 2

Una pequeña sociedad secreta dentro de la EPS tiene aviesas intenciones: hacer que el examen final de FM3 sea *obscenamente difícil*, con enunciados del estilo *"Demuestre que un conjunto de axiomas no puede ser a la vez consistente y completo."* o *"Demuestre el último teorema de Fermat."* La única forma de acabar con sus malvados planes es determinar con exactitud quién forma parte de dicha sociedad secreta. Tras intensas investigaciones se ha conseguido reducir el grupo de profesores de la EPS sospechosos a tan solo nueve personas:

$$\{Abraham, Ana, Carlos, Gabriel, Gianluca, Teo, Mariano, Rodrigo, Victor\}$$

La sociedad secreta es un subconjunto de estos nueve. Se ha encontrado una lista con los participantes en el complot, pero está cifrada utilizando notación lógica, para evitar que los descubran (pues saben que los alumnos de FM3 no podran resolver un problema así). El predicado *miembro* indica quién forma parte de la sociedad. Esto es: $miembro(x)$ es cierto si y sólo si x es miembro de la sociedad.

Los contenidos de la lista se encuentran a continuación. Traduzca a lenguaje natural cada uno de los predicados siguientes y deduzca quién forma parte de la sociedad secreta.

1. $\exists x, \exists y, \exists z, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge miembro(x) \wedge miembro(y) \wedge miembro(z))$
2. $\neg(miembro(Ana) \wedge miembro(Gianluca))$
3. $(miembro(Mariano) \vee miembro(Gabriel)) \implies \forall x, miembro(x)$
4. $miembro(Ana) \implies miembro(Gianluca)$
5. $miembro(Carlos) \implies miembro(Mariano)$
6. $(miembro(Abraham) \vee miembro(Teo)) \implies \neg miembro(Victor)$
7. $(miembro(Abraham) \vee miembro(Gianluca)) \implies \neg miembro(Rodrigo)$

Solución

1. $\exists x, \exists y, \exists z, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge miembro(x) \wedge miembro(y) \wedge miembro(z))$
   Esto se puede traducir por: "Existe un conjunto de 3 personas, a las que llamaremos x, y y z, diferentes entre sí, que pertenecen a la sociedad secreta." Otra forma más natural de decir esto seria omintir el nombrado de las personas: "Existen 3 personas que pertenecen a la sociedad secreta." O, de forma aún más simple: "La sociedad secreta cuenta con, al menos, 3 personas."

2. $\neg(miembro(Ana) \wedge miembro(Gianluca))$
   "Es imposible que tanto Ana como Gianluca formen parte de la sociedad" O, dicho de otra forma: "O Ana o Gianluca no forman parte de la sociedad."

3. $(miembro(Mariano) \vee miembro(Gabriel)) \implies \forall x, miembro(x)$
   "Si Mariano o Gabriel forman parte de la sociedad, entonces todo el mundo forma parte de la sociedad."

4. $miembro(Ana) \implies miembro(Gianluca)$
"Si Ana forma parte de la sociedad, entonces Gianluca también."

5. $miembro(Carlos) \implies miembro(Mariano)$
"Si Carlos forma parte de la sociedad, entonces Mariano también."

6. $(miembro(Abraham) \lor miembro(Teo)) \implies \neg miembro(Victor)$
"Si Abraham o Teo forman parte de la sociedad, entonces Víctor no." O, dicho de otra forma: "Si Víctor forma parte de la sociedad, entonces ni Abraham ni Teo forman parte."

7. $(miembro(Abraham) \lor miembro(Gianluca)) \implies \neg miembro(Rodrigo)$
"Si Abraham o Gianluca forman parte de la sociedad, entonces Rodrigo no." O, dicho de otra forma: "Si Rodrigo forma parte de la sociedad, entonces ni Abraham ni Gianluca forman parte."

Y ahora que ya tenemos las traducciones, vamos a argumentar por qué la sociedad secreta sélo puede estar compuesta por exactamente tres miembros: Abraham, Gianluca y Teo.

Fijándonos en (2) podemos deducir que existe al menos una persona, ya sea Ana o Gianluca, que no forma parte de la sociedad secreta. Pero también sabemos, por (3), que si Mariano o Gabriel formaran parte de la sociedad, entonces todo el mundo lo haría. Por lo que, por contradicción, concluimos que:

Mariano y Gabriel no forman parte de la sociedad secreta.

Ahora consideremos que (5) implica su contrapositivo: Si Mariano no forma parte de la sociedad, entonces tampoco Carlos forma parte. Por tanto, como Mariano no forma parte de la sociedad secreta:

Carlos no forma parte de la sociedad secreta.

Después nos fijamos en (4). Vemos que si Ana formara paerte de la sociedad, entonces Gianluca también, lo cual llevaría la contraria a (2). Así que, por contradicción, concluimos que:

Ana no forma parte de la sociedad secreta.

Ahora, supongamos que Víctor forma parte de la sociedad. Entonces, según (6), ni Abraham ni Teo formarían parte. Ya sabemos que Mariano, Gabriel, Carlos y Ana no forman parte de la sociedad secreta, por lo que, si suponemos que Víctor forma parte de la sociedad entonces solo habría tres personas que podrían pertenecer a ella: Víctor, Rodrigo y Gianluca. Como indica (1), la sociedad secreta tiene que estar compuesta por al menos 3 miembros, por lo que la sociedad tendría que estar formada por exactamente estos tres. Esto demuestra:

Lema 1: *Si Víctor forma parte de la sociedad, entonces Rodrigo y Gianluca también son miembros.*

Pero observando (7), vemos que si Gianluca forma parte de la sociedad, entonces Rodrigo no puede hacerlo, por lo que:

Lema 2: *Es imposible que tanto Gianluca como Rodrigo formen parte de la sociedad.*

Por tanto, a partir del Lema 2 concluimos que el Lema 1 es falso. Por lo que, por el contrapositivo, demostramos que la hipótesis del Lema 1 es falsa. Es decir, que:

Víctor no forma parte de la sociedad secreta.

Por último, supongamos que Rodrigo forma parte de la sociedad. Entonces, por (7), ni Abraham ni Gianluca formarían parte, y ya sabemos que Mariano, Gabriel, Carlos, Ana y Víctor no forman parte tampoco. Por tanto, en esta suposición la sociedad estaría compuesta de, como mucho, dos personas (Rodrigo y Teo). Esto contradice a (1), asi que concluimos que:

Rodrigo no forma parte de la sociedad secreta.

Es decir, que las únicas personas que podrían forman parte de la sociedad son Abraham, Gianluca y Teo. Como la sociedad tiene que contar con al menos 3 miembros, podemos concluir que:

Lema 3:*No hay ninguna sociedad secreta posible excepto la compuesta por Abraham, Gianluca y Teo.*

Pero aún no hemos terminado. Nos queda demostrar que la sociedad secreta compuesta por Abraham, Gianluca y Teo satisface las 7 condiciones que hemos expuesto. Así que definamos el conjunto $A = \{Abraham, Gianluca, Teo\}$ y demostremos la siguiente proposición:

Proposición: $\{Abraham, Gianluca, Teo\}$ *es la* ***única*** *sociedad secreta que satisface las condiciones (1)-(7).*

- $|A| = 3$ (Cardinalidad de A es 3), por lo que A satisface (1).
- $Ana \notin A$, por lo que A satisface (2) y (4).
- $Mariano, Gabriel \notin A$, por lo que la hipótesis de (3) es falsa, así que A satisface (3).
- $Carlos \notin A$, por lo que A satisface (5).
- Por último, $Victor, Rodrigo \notin A$, asi que las conclusiones tanto de (6) como de (7) son ciertas, por lo que A satisface (6) y (7).

Por tanto, $\{Abraham, Gianluca, Teo\}$ satisface las condiciones (1)-(7). Antes (Lema 3) hemos demostrado que esta sociedad secreta es la única que lo hace. $\square$

Ejercicio 3

Traduzca las siguientes frases del español a lenguaje de lógica de predicados. El dominio sobre el que se trabaja es X, el conjunto de todas las personas. Puede utilizar las siguientes funciones:

- $F(x)$: indica que x ha sido estudiante de FM3.
- $S(x)$: indica que x ha sacado sobresaliente en FM3.

- $J(x)$: indica que x le ha regalado un jamón a Rodrigo.
- $E(x, y)$: indica que x e y son la misma persona.

Las frases a traducir son las que siguen:

1. Hay gente que ha sido estudiante de FM3 y ha sacado sobresaliente en FM3.
2. Todos los que han cursado FM3 y le han regalado un jamón a Rodrigo han sacado sobresaliente en FM3.
3. No hay nadie que le haya regalado un jamón a Rodrigo y que no haya sacado sobresaliente en FM3.
4. Hay al menos tres personas que le han regalado un jamón a Rodrigo y no han cursado FM3.

Solución

1. $\exists x \in X, (F(x) \wedge S(x))$
2. $\forall x \in X, (F(x) \wedge J(x)) \implies S(x)$
3. $\nexists x \in X, (J(x) \wedge \neg S(x))$
4. $\exists x, y, z \in X, (\neg E(x, y) \wedge \neg E(x, z) \wedge \neg E(y, z))$
   $\wedge (J(x) \wedge \neg F(x)) \wedge (J(y) \wedge \neg F(y)) \wedge (J(z) \wedge \neg F(z))$

Ejercicio 4

Use una tabla de verdad para demostrar si las siguientes proposicones son o no ciertas:

1. $\neg(P \vee (Q \wedge R)) = (\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
2. $\neg(P \wedge (Q \vee R)) = (\neg P) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$

Solución

1. Demostramos que el lado izquierdo:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$\neg(P \vee (Q \wedge R))$
T	T	T	T	F
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Y el lado derecho coinciden en todas las combinaciones posibles:

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg Q \vee \neg R$	$(\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
F	F	F	F	F
F	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

2. Demostramos que el lado izquierdo:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$\neg(P \wedge (Q \vee R))$
T	T	T	T	T	F
T	T	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	F	F	T

Y el lado derecho coinciden en todas las combinaciones posibles:

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg Q \wedge \neg R$	$(\neg P) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	F	T
T	T	T	T	T

Ejercicio 5

Los conectores binarios $\wedge$ (*and*), $\vee$ (*or*) y $\implies$ (*implies*) aparecen multitud de veces en expresiones lógicas. Sin embargo, a la hora de diseñar chips y circuitos electronicos, suele ser mucho más económico construir la lógica del sistema utilizando únicamente otra operación: ***nand***, ya que ésta es más sencilla de representar en un circuito. Aquí tienes la tabla de verdad para la operación *nand*:

P	Q	P nand Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Vamos a trabajar con esta operación lógica. Para cada una de las expresiones que siguen, encuentre una expresión equivalente usando únicamente *nand* y $\neg$ (*not*), así como cualesquiera paréntesis crea necesarios para especificar el orden en el que se aplican las operaciones. Puedes utilizar A, B y los operadores tantas veces como desee:

1. $A \wedge B$
2. $A \vee B$
3. $A \implies B$

Por otra parte, como es posible expresar cualquier expresión lógica usando únicamente *nand* (sin necesidad de usar $\neg$), encuentre una expresión equivalente a $(\neg A)$ utilizando sólo *nand* y, de ser necesario, paréntesis.

Es más, incluso las constantes T y F pueden ser expresadas únicamente recurriendo a *nand.* Construya una expresión gracias a la cual, a partir de una proposición arbitraria A y uno o más *nand*, dé como resultado siempre T, cualesquiera valores tome A. Construya también otra expresión que a partir de A y uno o más *nand*, dé como resultado siempre F, cualesquiera valores tome A.

Solución

Consideramos los tres casos planteados:

1. Este primer caso es automático, pues *nand* es lo opuesto a *and* ($\wedge$). Por tanto:

$$A \wedge B = \neg(A \, nand \, B)$$

2. Para este caso planteamos la tabla de verdad de $A \vee B$ frente a la de $A \, nand \, B$ y buscamos que combinación de entradas (A, B, $\neg A$ y $\neg B$) que la pueden construir:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \, nand \, B$	$(\neg A) \, nand \, (\neg B)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F

Así que tenemos que:

$$A \vee B = (\neg A) \, nand \, (\neg B)$$

3. Para este caso, sabemos que podemos expresar la implicación de la siguiente manera:

$$A \implies B = (\neg A) \vee B$$

Y, dado que sabemos cómo expresar una unión ($\vee$) con *nand* por el punto 2, podemos expresar la implicación de la siguiente manera:

$$A \implies B = A\,nand\,(\neg B)$$

Para expresar la negación ($\neg$) planteamos una tabla de verdad únicamente con A y $\neg A$ que nos permita deducir cómo construir esta última a partir de *nand*. Pensemos en que *nand* es F si sus dos entradas son T, por lo que:

A	$\neg A$	$A\,nand\,A$
T	F	F
F	T	T

Asi que concluimos que:

$$\neg A = A\,nand\,A$$

Finalmente, para expresar las constantes T y F, recurrimos de nuevo a una tabla de verdad, esta vez mostrando A y $\neg A$, y buscando qué combinación de entradas a *nand* utilizándolas (pues ya sabemos que podemos expresar $\neg A$ como $A\,nand\,A$) nos da el resultado pedido.

Para T, buscamos que las dos entradadas a *nand* sean siempre distintas, pues eso hace el resultado siempre T:

A	$\neg A$	$(\neg A)\,nand\,A$
T	F	T
F	T	T

Con lo que:

$$T = (\neg A)\,nand\,A$$

Y, sustituyendo $\neg A$:

$$T = (A\,nand\,A)\,nand\,A$$

Para F, sabemos que la única forma de que *nand* de como resultado F es que las dos entradas sean T. Y como sabemos cómo expresar T a partir de *nand*, A y $\neg A$, concluimos que:

$$F = [(\neg A)\,nand\,A]\,nand\,[(\neg A)\,nand\,A]$$

Y, sustituyendo $\neg A$:

$$F = [(A\,nand\,A)\,nand\,A]\,nand\,[(A\,nand\,A)\,nand\,A]$$

Ejercicio 6

Dado un $x \in \mathbb{Z}$, demuestre que si $x^3 + x^2 + x$ es impar $\implies$ x es impar. ¿Qué tipo de demostración ha utilizado?

Solución

Utilizaremos el método del contrapositivo. Demostraremos que:

$$\text{Si } x \text{ es par} \implies x^3 + x^2 + x \text{ es par.}$$

Demostración: Si x es par, entonces $x = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto:

$$x^3 + x^2 + x = (2k)^3 + (2k)^2 + 2k = 8k^3 + 4k^2 + 2k = 2(4k^3 + 2k^2 + k)$$

Como $2(4k^3 + 2k^2 + k)$ es par, entonces $x^3 + x^2 + x$ es par. $\square$

Ejercicio 7

Considere las siguientes proposiciones:

- $P : (A \wedge B) \implies C$
- $Q : (\neg C \vee \neg A) \implies (\neg C \vee \neg B)$

¿Cual de las siguientes opciones describe mejor la relación entre P y Q? Rodea con un círculo la respuesta correcta.

1. P y Q son equivalentes.
2. $P \implies Q$
3. $Q \implies P$
4. Ninguna de las anteriores.

Dibuje una o más tablas de verdad para ilustrar su razonamiento. Puede utilizar tantas columnas como crea conveniente.

- Si aseguramos que A va a ser siempre 1, ¿cuál es la nueva relación entre P y Q?
- ¿Y si aseguramos que B va a ser siempre 1?
- ¿Y si aseguramos que C va a ser siempre 1?

Solución

Dibujamos la tabla de verdad para P:

A	B	C	$A \wedge B$	P
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Dibujamos la tabla de verdad para Q:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg C \vee \neg A$	$\neg C \vee \neg B$	Q
T	T	T	F	F	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

- Fijándonos en las dos tablas de verdad vemos que ni $P \implies Q$ ni $Q \implies P$ son ciertos. Por tanto, la respuesta correcta es la número 4.
- Para el caso en el que A sea siempre cierto observamos de nuevo las tablas de verdad de P y Q, pero ahora considerando sólo las filas en las que $A = T$. Es decir, ignorando el resto de filas. En este caso la relación es $P \implies Q$.
- Repetimos el proceso para el caso en que B sea siempre cierto, observando una vez más que la relación no es $P \implies Q$ ni $Q \implies P$.
- Finalmente, observamos las tablas para $C = T$, viendo que para este caso P y Q siguen la relación $Q \implies P$.

Ejercicio 8

Dados los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} Stark &= \{Rob, Sansa, Arya, Bran, Rickon\} \\ Lannister &= \{Jaime, Cersei, Tyrion, Joffrey\} \\ Baratheon &= \{Robert, Stannis, Joffrey\} \\ Targaryen &= \{Daenerys\} \\ Casas &= \{Stark, Lannister, Baratheon, Targaryen\} \end{aligned}$$

1. ¿Son $Stark$, $Lannister$ y $Casas$ mutuamente disjuntos?
2. ¿Son $Lannister$, $Baratheon$ y $Targaryen$ mutuamente disjuntos?
3. ¿Cuál es la cardinalidad de $Casas$?
4. ¿Cuál es el conjunto potencia de $Targaryen$?
5. Escriba el conjunto $Fanfic$, definido como $Baratheon \times Targaryen$.

Solución

1. $Stark$, $Lannister$ y $Casas$ son mutuamente disjuntos porque no tienen ningún elemento en común.
2. $Lannister$, $Baratheon$ y $Targaryen$ no son mutuamente disjuntos porque $Lannister$ y $Baratheon$ tienen en común el elemento $Joffrey$.
3. La cardinalidad de $Casas$ es 4, ya que tiene 4 elementos.
4. El conjunto potencia de $Targaryen$ es: $\mathcal{P}(Targaryen) = \{\emptyset, Daenerys\}$
5. $Fanfic = \{(Robert, Daenerys), (Stannis, Daenerys), (Joffrey, Daenerys)\}$